О группах G_n^2 и группах Кокстера

В. О. Мантуров

В [1] были построены группы G_n^k, тесно связанные с группами кос, геометрией, топологией, динамическими системами. Крайне важны проблемы тождества и сопряженности для G_n^k. Уже группы G_n^2 свободных кос (известные также как *группы виртуальных гауссовых кос* [2]) глубоко нетривиальны и имеют геометрический смысл [3], [4]; понимание этих групп может пролить свет на группы G_n^k для $k > 2$, так как имеются гомоморфизмы $G_n^k \to G_{n-1}^k$ и $G_n^k \to G_{n-1}^{k-1}$ (см. [1], [5]). Цель настоящей заметки – построение явной биекции между группой G_n^2 и группой Кокстера $C(n,2)$; эта биекция – изоморфизм на подгруппах конечного индекса этих двух групп. Это приводит к алгебраическому решению проблемы слов в группе G_n^2. Окончательный результат сформулирован в виде теоремы 3: группа G_n^2 вкладывается в полупрямое произведение группы Кокстера $C(n,2)$ и группы перестановок; мы сначала опишем "процедуру переписывания", дающую биекцию между словами из $C(n,2)$ и словами из G_n^2. Похожий алгоритм "переписывания" исследовался в [6]. Вопрос об аналогичном представлении G_n^k при $k > 2$ в терминах групп Кокстера остается открытым.

Пусть Γ – граф на $\binom{n}{2}$ вершинах $\{b_{ij}\}$, где i, j пробегают все неупорядоченные пары различных чисел из $\{1,\dots,n\}$; вершины соединены ребром (индекса 3) тогда и только тогда, когда они имеют один общий индекс. Группа $C(n,2)$ задается образующими b_{ij} и семействами порождающих соотношений

$$(b_{ij}b_{ik})^3 = 1 \qquad \forall\, i,j,k \in \{1,\dots,n\}\colon \operatorname{Card}(\{i,j,k\}) = 3; \tag{1}$$

$$b_{ij}b_{kl} = b_{kl}b_{ij} \quad \forall\, i,j,k,l \in \{1,\dots,n\}\colon \operatorname{Card}(\{i,j,k,l\}) = 4; \tag{2}$$

$$b_{ij}^2 = 1 \qquad \forall\, i,j \in \{1,\dots,n\}\colon\ i \neq j. \tag{3}$$

Для целого $n > 2$ определим G_n^2 как группу, имеющую $\binom{n}{2}$ образующих a_{ij} (для всевозможных неупорядоченных пар (i,j) чисел из $\{1,\dots,n\}$) и три семейства определяющих соотношений:

$$a_{ij}a_{ik}a_{jk} = a_{jk}a_{ik}a_{ij} \quad \forall\, i,j,k \in \{1,\dots,n\}\colon \operatorname{Card}(\{i,j,k\}) = 3; \tag{1$'$}$$

$$a_{ij}a_{kl} = a_{kl}a_{ij} \qquad \forall\, i,j,k,l \in \{1,\dots,n\}\colon \operatorname{Card}(\{i,j,k,l\}) = 4; \tag{2$'$}$$

$$a_{ij}^2 = 1 \qquad \forall\, i,j \in \{1,\dots,n\}\colon\ i \neq j. \tag{3$'$}$$

Рассмотрим гомоморфизм $l\colon G_n^2 \to S_n$, переводящий a_{ij} в транспозицию (i,j), и гомоморфизм $m\colon C(n,2) \to S(n)$, переводящий b_{ij} в (i,j). Положим $C'(n,2) = \operatorname{Ker}(m)$. Пусть $PG_n^2 = \operatorname{Ker}(l)$.

Пусть $w = a_{i_{1,1},i_{1,2}} \cdots a_{i_{k,1},i_{k,2}}$ – слово, задающее элемент из G_n^2. Для $j = 1,\dots,k$ через w_j обозначим произведение первых j букв слова w, а через w_0 обозначим пустое слово. Для $p = 1,\dots,k$ определим перестановку $\sigma_p = l(w_p)^{-1}$, полагая $\sigma_0 = \mathrm{id}$. Положим $\widetilde{w} = b_{\sigma_0(i_{1,1}),\sigma_0(i_{1,2})} b_{\sigma_1(i_{2,1}),\sigma_1(i_{2,2})} \cdots b_{\sigma_{k-1}(i_{k,1}),\sigma_{k-1}(i_{k,2})}$.

Теорема 1. *Если два слова w, w' задают равные элементы группы G_n^2, то слова $\widetilde{w}$, $\widetilde{w}'$ порождают равные элементы группы $C(n,2)$. Более того, $l(w) = m(\widetilde{w})^{-1}$.*

Доказательство. Непосредственно проверяются три случая: когда w' связано с w соотношением вида (1$'$), вида (2$'$) или вида (3$'$). В каждом из этих случаев при переходе от $\widetilde{w}$ к $\widetilde{w}\,'$ мы получаем соответствующее соотношение из группы $C(n,2)$. Последнее утверждение теоремы доказывается по индукции: мы начинаем с транспозиции $(i_{1,2}, i_{1,2})$, одинаковой для слов w и $\widetilde{w}$, а далее пользуемся тем, что $(ab)^{-1} = a^{-1}(ab^{-1}a^{-1})$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10291).

DOI: https://doi.org/10.4213/rm9765

Обозначим построенное выше отображение $PG_n^2 \to C(n,2)$, $w \mapsto \widetilde{w}$, через co; ясно, что $C'(n,2) = \mathrm{Im}_{\mathrm{co}}(PG_n^2)$. Обратное отображение строится аналогично: нужно лишь принять во внимание тот факт, что если $\widetilde{w} = \mathrm{co}(w)$, то $l(w) = m(\widetilde{w})^{-1}$. Поэтому, зная $\widetilde{w}$, мы знаем все перестановки $\sigma_k(w)$ и $l(w)$ для слова w, которое мы собираемся строить. Так как для $w \in PG_n^2$ перестановка $l(w)$ – тождественная, то для $w_1, w_2 \in PG_n^2$ имеет место равенство $\widetilde{w_1 w_2} = \widetilde{w}_1 \widetilde{w}_2$. Это приводит к следующей теореме.

Теорема 2. *Отображение* co: $w \mapsto \widetilde{w}$ *является изоморфизмом* $PG_n^2 \to C'(n,2)$.

Для групп Кокстера существует алгоритм *градиентного спуска* (см., например, [7]), состоящий в следующем. Пусть дана группа Кокстера W с системой образующих-отражений $S = \{s_i\}$ и с соотношениями $s_i^2 = 1$, $(s_i s_j)^{m_{ij}} = 1$. Имеем: $s_i s_j \cdots = s_j s_i \cdots$ (по m_{ij} сомножителей в левой и правой частях). Это соотношение *замены* является *элементарной эквивалентностью*, которая не меняет длины слова. Соотношение $s_j s_j = 1$ можно понимать как *элементарную эквивалентность*, изменяющую длину на 2. Слово w от образующих s_i называется *приведенным*, если его длина минимальна среди длин всех слов, представляющих тот же элемент группы W. Если слово w эквивалентно приведенному слову w', то можно перейти от w к w', используя лишь элементарные преобразования, не увеличивающие длины. В частности, если оба слова w, w' приведенные, то можно перейти от w к w' последовательностью замен. Алгоритм переписывания дается следующим утверждением.

Следствие 1. *Для каждого слова* w *в алфавите* $\{a_{ij}\}$ *и редуцированного слова* w', *эквивалентного ему в* G_n^2, *можно перейти от* w *к* w' *с помощью последовательности преобразований* $(2')$, *замен типа* $(1')$ *и сокращений идущих подряд одинаковых букв* $a_{ij}a_{ij} \to \varnothing$. *Если слова* w *и* w' *приведенные, то можно перейти от* w *к* w', *используя только* $(1')$ *и* $(2')$.

Рассмотрим полупрямые произведения $G_n^2 \leftthreetimes S_n$ и $C(n,2) \leftthreetimes S_n$, где S_n действует на образующих a_{ij} и b_{ij} перестановками индексов.

Теорема 3. *Существует изоморфизм между полупрямыми произведениями* $C(n,2) \leftthreetimes S_n$ *и* $G_n^2 \leftthreetimes S_n$, *переводящий* $(b_{ij}, 1)$ *в* $(a_{ij}, (i,j))$ *для каждой транспозиции* (i,j) *и оставляющий неподвижной пару* $(1, \sigma)$. *Таким образом*, G_n^2 *изоморфна нормальной подгруппе в группе* $C(n,2) \leftthreetimes S_n$, *дополнительной к* S_n.

Я благодарен Л. А. Бокутю за полезные обсуждения и Э. Б. Винбергу, предложившему переформулировать главный результат в виде теоремы 3.

Список литературы

[1] V. O. Manturov, *Non-Reidemeister knot theory and its applications in dynamical systems, geometry, and topology*, 2015, 10 pp., arXiv: 1501.05208. **[2]** V. G. Bardakov, P. Bellingeri, C. Damiani, *J. Knot Theory Ramifications*, **24**:12 (2015), 1550063, 23 pp. **[3]** V. O. Manturov, *J. Knot Theory Ramifications*, **24**:10 (2015), 1540007, 12 pp. **[4]** V. O. Manturov, H. Wang, *J. Knot Theory Ramifications*, **21**:13 (2012), 1240010, 23 pp. **[5]** V. O. Manturov, I. M. Nikonov, *J. Knot Theory Ramifications*, **24**:13 (2015), 1541009, 16 pp. **[6]** И. К. Жук, *Докл. АН БССР*, **19**:6 (1975), 485–487. **[7]** A. Björner, F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter groups*, Grad. Texts in Math., **231**, Springer, New York, 2005, xiv+363 pp.

Василий Олегович Мантуров
(Vassily O. Manturov)
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана;
Челябинский государственный университет
E-mail: vomanturov@yandex.ru

Представлено В.М. Бухштабером
Принято редколлегией
01.07.2016